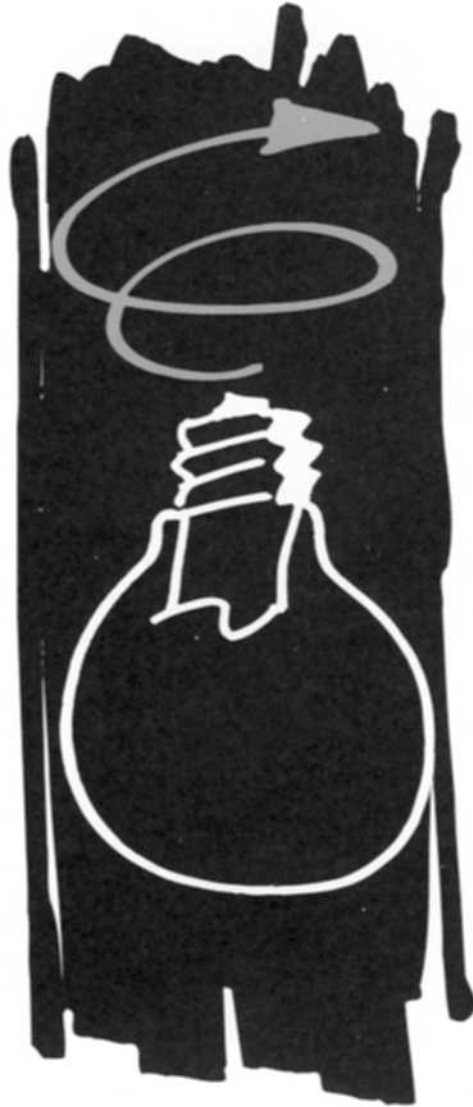


Einführung in die Grundelemente der Mathematik



b+r
verlag

12	Gleichungen	67
12.1	Begriffserklärung	67
12.2	Gleichungen von der Form $ax = b$	67
12.3	Probe	68
12.4	Weitere Regeln zum Lösen einfacher Gleichungen mit einer Unbekannten.....	68
12.5	Gleichungen von der Form $x + c = b$	69
12.6	Übungsaufgaben.....	69
13	Gleichungen von der Form $ax + b = cx + d$	70
13.1	Einfache Gleichungen	70
13.2	Gleichungen mit Platzhaltern	71
13.3	Gleichungen mit Klammern.....	71
13.4	Übungsaufgaben.....	73
14	Gleichungen und Formeln mit Brüchen	74
14.1	Lineare Gleichungen mit Brüchen.....	74
14.2	Umstellen von Formeln	75
14.3	Übungsaufgaben.....	76
15	Rechnerische Lösung von 2 linearen Gleichungen mit 2 Unbekannten	77
15.1	Gleichsetzungsverfahren	77
15.2	Einsetzungsverfahren	78
15.3	Übungsaufgaben.....	79
15.4	Additionsverfahren	79
15.5	Übungsaufgaben.....	82
16	Quadratische Gleichungen	84
16.1	Unvollständig quadratische Gleichungen.....	84
16.1.1	Begriffe.....	84
16.1.2	Defekt-quadratische Gleichungen.....	84
16.1.3	Rein-quadratische Gleichungen.....	85
16.1.4	Übungsaufgaben.....	87
16.2	Gemischt-quadratische Gleichungen	87
16.2.1	Lösung mit Hilfe der quadratischen Ergänzung	87
16.2.2	Lösung mit Hilfe der Lösungsformel.....	89
16.2.3	Übungsaufgaben.....	90
16.3	Graphische Lösung quadratischer Gleichungen	91
16.3.1	Lösungen mit Hilfe der Schnittpunkte mit der x-Achse	91
16.3.2	Lösung mit Hilfe der Normalparabel.....	92
16.3.3	Übungsaufgaben.....	94
16.4	Quadratische Gleichungen, die innerhalb der reellen Zahlen keine Lösung haben.....	95
16.4.1	Lehrbeispiele.....	95
16.4.2	Die Bedeutung der Diskriminante	95
16.4.3	Übungsaufgaben.....	96

Lehrbeispiel 223

Berechnen Sie x aus $3x - \frac{2}{7}x - \frac{5}{7} = 16 - \frac{7x + 19}{2} - \frac{2x + 1}{3}$!

Lösung:

Der Hauptnenner beträgt 42.

$$3x - \frac{2}{7}x - \frac{5}{7} = 16 - \frac{7x + 19}{2} - \frac{2x + 1}{3} \quad | \cdot 42$$

$$3x \cdot 42 - \frac{2 \cdot 42}{7}x - \frac{5 \cdot 42}{7} = 16 \cdot 42 - \frac{(7x + 19) \cdot 42}{2} - \frac{(2x + 1) \cdot 42}{3}$$

Nach dem Kürzen erhalten Sie:

$$3x \cdot 42 - 2 \cdot 6x - 5 \cdot 6 = 16 \cdot 42 - (7x + 19) \cdot 21 - (2x + 1) \cdot 14$$

$$126x - 12x - 30 = 672 - 147x - 399 - 28x - 14$$

$$126x - 12x + 147x + 28x = 672 - 399 - 14 + 30$$

$$289x = 289$$

$$\underline{\underline{x = 1}}$$

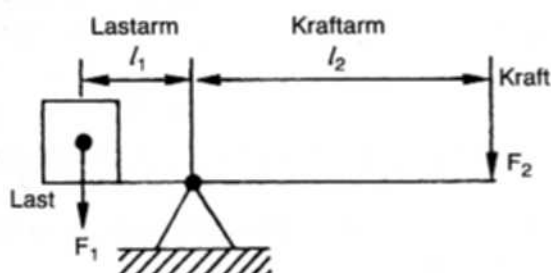
Schwierigere Gleichungen, vor allem solche, bei denen die Unbekannte im Nenner steht, werden später behandelt.

14.2 Umstellen von Formeln

Formeln sind Gleichungen, die den Zusammenhang irgendwelcher Größen angeben.

Diese Zusammenhänge können häufig durch Versuche ermittelt und von Ihnen nachgeprüft werden.

Eine solche Formel gibt z. B. den Zusammenhang zwischen Kraft, Last, Kraftarm und Lastarm bei einem Hebel an.



$$F_1 \cdot l_1 = F_2 \cdot l_2$$

Eine dieser vier Größen ist bestimmbar, wenn die drei anderen angegeben sind. Die gesuchte Größe (oder Unbekannte) heißt allerdings nicht mehr x , sondern F_1 , F_2 , l_1 oder l_2 .

Lehrbeispiel 224

Bestimmen Sie F_1 aus $F_1 \cdot l_1 = F_2 \cdot l_2$!

Lösung:

Das Ziel ist die Umstellung dieser Formel nach F_1 . Wir erreichen es wie beim Lösen einer Gleichung mit der Unbekannten x . Die gesuchte Größe muß am Ende allein auf der linken Seite stehen.

Wie beim Lösen einer Gleichung können Sie nach folgenden Regeln verfahren:

Regel 1: Beide Seiten einer Gleichung dürfen mit der gleichen Größe multipliziert werden oder durch die gleiche Größe dividiert werden.

Regel 2: Bei einer Gleichung darf auf beiden Seiten die gleiche Größe addiert oder subtrahiert werden.

Regel 3: Man darf bei einer Formel (Gleichung) die Vorzeichen sämtlicher Glieder auf beiden Seiten ändern, indem man beide Seiten mit (-1) multipliziert.

Regel 4: Man darf die beiden Seiten einer Formel (Gleichung) vertauschen.

F_1 erhalten Sie aus $F_1 \cdot l_1 = F_2 \cdot l_2$, indem Sie gemäß Regel 1 die ganze Gleichung durch l_1 dividieren:

$$F_1 \cdot l_1 = F_2 \cdot l_2 \quad | : l_1$$

$$\frac{F_1 \cdot l_1}{l_1} = \frac{F_2 \cdot l_2}{l_1}$$

$$\underline{\underline{F_1 = \frac{F_2 \cdot l_2}{l_1}}}$$

Lehrbeispiel 225

Ermitteln Sie n_2 aus $n_1 \cdot d_1 = n_2 \cdot d_2$!

Lösung:

Die gesuchte Größe steht auf der rechten Seite der Formel. Als erstes vertauschen Sie die beiden Seiten gemäß Regel 4, um die gesuchte Größe auf die linke Formelseite zu bringen.

Dadurch entsteht:

$$n_2 \cdot d_2 = n_1 \cdot d_1 \quad | \cdot \frac{1}{d_2}$$

$$\frac{n_2 \cdot d_2}{d_2} = \frac{n_1 \cdot d_1}{d_2}$$

$$\underline{\underline{n_2 = \frac{n_1 \cdot d_1}{d_2}}}$$

Lehrbeispiel 226Berechnen Sie a aus $U = a + b + c$!**Lösung:**

Auch bei diesem Beispiel beginnen Sie mit dem Vertauschen der beiden Seiten, um die gesuchte Größe a auf die linke Seite der Formel zu bringen.

$$a + b + c = U$$

Bei der gesuchten Größe a stehen + b und + c. Gemäß der Regel 2 werden auf beiden Seiten der Gleichung a und b subtrahiert. Dadurch entsteht:

$$\underline{a = U - b - c}$$

Lehrbeispiel 227Berechnen Sie a aus $U = 2a + 2b$!**Lösung:**

Die gesuchte Größe a ist in diesem Beispiel mit „mal“ 2 und +2b verbunden. Nach der Regel „Punktrechnung vor Strichrechnung“ ist a stärker mit „mal“ 2 als mit +2b verbunden. Es muß zuerst das lockerer gebundene +2b beseitigt werden. Nach dem Vertauschen der beiden Seiten subtrahieren wir also zuerst auf beiden Seiten den Term 2b. Dann entsteht:

$$U = 2a + 2b$$

$$2a + 2b = U \quad | -2b$$

Schließlich multiplizieren wir beide Seiten der Formel noch mit $\frac{1}{2}$

$$2a = U - 2b \quad | \cdot \frac{1}{2}$$

$$\underline{\underline{a = \frac{U - 2b}{2}}}$$

Lehrbeispiel 228Berechnen Sie D aus $V_R = \frac{D-d}{2} \cdot \frac{L}{l}$!

$$\text{Lösung: } V_R = \frac{D-d}{2} \cdot \frac{L}{l}$$

$$\frac{D-d}{2} \cdot \frac{L}{l} = V_R \quad | \cdot 2l$$

Wir multiplizieren zunächst mit dem Nenner 2l.

$$\frac{(D-d) \cdot L \cdot 2l}{2l} = V_R \cdot 2l$$

$$(D-d) \cdot L = V_R \cdot 2l \quad | \cdot \frac{1}{L}$$

$$\frac{(D-d) \cdot L}{L} = \frac{V_R \cdot 2l}{L}$$

$$D-d = \frac{2 \cdot V_R \cdot l}{L}$$

$$\underline{\underline{D = \frac{2 \cdot V_R \cdot l}{L} + d}}$$

Anmerkung: Ein Bruchstrich wirkt wie eine Klammer, die hier die Differenz D - d im Zähler zusammenhält. Bevor diese Differenz getrennt werden darf, muß sie erst **allein** auf der linken Seite stehen.

Bei all den weiterführenden Beispielen und Aufgaben im Verlauf dieses Lehrgangs Mathematik werden Sie immer

wieder auf die Regeln der Gleichungslehre verwiesen werden.

Bevor Sie deshalb am Gebäude der Mathematik weiterbauen, müssen Sie diese Grundlagen beherrschen. Ihre Kenntnisse können Sie anhand der folgenden Aufgaben überprüfen. Insbesondere sollen die am Ende zusammengestellten Übungsarbeiten, die Sie in jeweils 45 Minuten lösen sollten, eine Kontrollmöglichkeit bieten, ob Sie die Aufgaben auch in der in Prüfungen vorgegebenen Zeit bearbeiten können.

Die im folgenden zusammengestellten Aufgaben werden für jemand, der schon Vorkenntnisse in Algebra hatte, umfangmäßig schon zuviel sein. Manchem werden aber diese Übungsmöglichkeiten noch nicht genügen, um den Stoff vollständig zu beherrschen.

14.3 ÜBUNGSAUFGABEN

1. Berechnen Sie x und machen Sie die Probe:

$$a) \frac{2x}{13} = \frac{3}{5} \quad b) \frac{5x}{19} = \frac{25}{76} \quad c) \frac{3}{10}x = \frac{39}{5}$$

$$d) \frac{0,8x}{7} = \frac{16}{10} \quad e) \frac{1}{2}x = 70$$

2. Berechnen Sie x und machen Sie die Probe:

$$a) \frac{4x}{15} - \frac{2x}{5} - \frac{x}{3} = \frac{3x}{8} - \frac{5x}{24} - 38$$

$$b) \frac{13x-1}{8} - \frac{5x-6}{6} + \frac{2x+3}{9} = \frac{5x+36}{4}$$

$$c) \frac{3x-1}{2} + \frac{16-x}{3} - \frac{5x-3}{4} + \frac{4x-1}{6} = \frac{x+8}{2} + \frac{30-2x}{8}$$

3. Formen Sie folgende Formeln nach den angegebenen Größen um:

$$a) z_2 \text{ aus: } i = \frac{z_2}{z_1} \quad b) b \text{ aus: } z = \frac{b \cdot i}{s}$$

$$c) l \text{ aus: } t_h = \frac{d \cdot \pi \cdot l \cdot i}{v \cdot 1000 \cdot s}$$

4. Formen Sie folgende Formeln nach den angegebenen Größen um:

$$a) D \text{ aus: } \frac{1}{k} = \frac{D-d}{l} \quad b) h \text{ aus: } A = \frac{a+c}{2} \cdot h$$

$$c) c \text{ aus: } A = \frac{a+c}{2} \cdot h$$

5. Lösen Sie die folgende Gleichung zuerst nach R, dann nach R_1 und schließlich nach R_2 auf. (Sie haben also 3 Aufgaben!)

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$$

6. Lösen Sie die folgende Gleichung zuerst nach f, dann nach g und schließlich nach b auf.

$$\frac{1}{g} + \frac{1}{b} = \frac{1}{f}$$

Die Lösungen zu den Übungsaufgaben finden Sie im Anhang.